

Radiación de Hawking

Macarena Lagos U.

03 de Mayo del 2011

Introducción

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Hawking, en 1974, demuestra que los agujeros negros estáticos radían con un espectro igual al de un cuerpo negro.

Método: teoría semi cuántica. Esto es un primer acercamiento a la teoría cuántica de gravedad.

Evaporación de agujeros negros? la radiación reduce la energía y, por lo tanto, la masa de los agujeros negros. Se asocian cantidades termodinámicas a cantidades características de agujeros negros.

Pero la radiación de Hawking aún no es completamente entendida porque falta un sentido estadístico.

Cuantización de Campo

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Por simplicidad, tomamos un campo escalar ϕ sin masa, cuyo lagrangiano más simple es

$$L = \int d^3x \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi \quad (1)$$

Este lagrangiano es invariante ante transformaciones conformes:

$$\text{En 2D: } g^{ab} \rightarrow \Omega^{-2} g^{ab} \quad \text{y} \quad \sqrt{|g|} \rightarrow \Omega^2 \sqrt{|g|} \quad (2)$$

$$\text{En 4D: } g^{ab} \rightarrow \Omega^{-2} g^{ab} \quad \text{y} \quad \sqrt{|g|} \rightarrow \Omega^4 \sqrt{|g|} \quad \phi \rightarrow \Omega^{-2} \phi \quad (3)$$

y, por lo tanto, la ecuación de campo también lo es

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a \sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \phi = 0 \quad (4)$$

En una región plana o conforme plana, se elige una base completa y ortonormal f_ω de soluciones a esta ecuación con frecuencia positiva.

Cuantización de Campo

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

El producto interno se define como

$$(f, h) = -i \int d\Sigma_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (f \partial_\nu h^* - \partial_\nu f h^*) \quad (5)$$

En particular, tendremos que

$$(f_\omega, f_{\omega'}) = \delta(\omega - \omega')$$

$$(f_\omega^*, f_{\omega'}) = 0$$

$$(f_\omega^*, f_{\omega'}^*) = -\delta(\omega - \omega')$$

En esta base, el campo escalar se expande como

$$\phi = \int d\omega (a_\omega f_\omega + a_\omega^\dagger f_\omega^*) \quad (6)$$

donde a_ω y a_ω^\dagger son operadores de destrucción y creación, que satisfacen

$$[a_\omega, a_{\omega'}] = [a_\omega^\dagger, a_{\omega'}^\dagger] = 0$$

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$$

Estado Vacío

En esta región se define estado cuántico vacío $|0\rangle$, tal que

$$a_\omega |0\rangle = 0 \quad (7)$$

Finalmente, se define el operador número N_ω como

$$N_\omega = a_\omega^\dagger a_\omega \quad (8)$$

que da cuenta del número de partículas cuánticas de un estado.

Transformaciones de Bogoliubov

En otra región plana o conforme plana se elige otra base de soluciones con frecuencia positiva p_{ω} , las cuáles estarán relacionadas por transformaciones lineales a las soluciones anteriores.

Estas transformaciones son llamadas de Bogoliubov:

$$p_{\omega} = \int d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*) \quad (9)$$

$$\Rightarrow f_{\omega} = \int d\omega' (\alpha_{\omega'\omega}^* p_{\omega'} - \beta_{\omega'\omega} p_{\omega'}^*) \quad (10)$$

donde $\alpha_{\omega\omega'} = (p_{\omega}, f_{\omega'})$ y $\beta_{\omega\omega'} = -(p_{\omega}, f_{\omega'}^*)$ son los coeficientes que relacionan las dos bases.

De igual modo, en esta nueva base hay nuevos operadores b_{ω} y b_{ω}^{\dagger} ,

$$b_{\omega} = \int d\omega' (\alpha_{\omega\omega'}^* a_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{\dagger}) \quad (11)$$

$$\Rightarrow a_{\omega} = \int d\omega' (\alpha_{\omega'\omega} b_{\omega'} + \beta_{\omega'\omega}^* b_{\omega'}^{\dagger}) \quad (12)$$

Transformaciones de Bogoliubov

Los coeficientes de Bogoliubov satisfacen las siguientes propiedades:

$$\int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}\alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega}\beta_{\Omega'\omega}^*) = \delta(\Omega - \Omega')$$
$$\int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}\beta_{\Omega'\omega} - \beta_{\Omega\omega}\alpha_{\Omega'\omega}) = 0$$

que surgen de imponer que las soluciones p_ω también son una base ortonormal y completa.

Vacíos Diferentes

Así, el campo escalar ϕ también se puede expresar como

$$\phi = \int d\omega (b_\omega p_\omega + b_\omega^\dagger p_\omega^*) \quad (13)$$

En esta nueva base se define un vacío $|\bar{0}\rangle$, tal que

$$b_\omega |\bar{0}\rangle = 0 \quad (14)$$

Vemos que, en general, la medición del número de partículas depende de cual base tomamos:

$$\langle 0 | \bar{N} | 0 \rangle = \langle 0 | b_\omega^\dagger b_\omega | 0 \rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (15)$$

Los dos vacíos no son iguales debido al coeficiente $\beta_{\omega\omega'}$ que mezcla las soluciones de frecuencia positiva con las de frecuencia negativa. Esto nos dice que la definición de partícula depende de la región, es decir, el número de partículas depende del sistema de referencia.

Efecto Unruh

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Este efecto predice que partículas pueden ser detectadas en el vacío por un observador acelerado.

En particular, un observador con aceleración propia constante mide partículas de un campo escalar sin masa.

La distribución de partículas es la característica de un baño termal de radiación de cuerpo negro.

Metricas

Trabajemos en un espacio-tiempo bidimensional de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -d\bar{u}d\bar{v} \quad (16)$$

donde $\bar{u} = t - x$ y $\bar{v} = t + x$.

Ahora consideremos un espacio-tiempo de Minkowski que sufre una aceleración constante. Este se obtiene con la transformación

$$v = \frac{1}{a} \ln(a\bar{v}) \quad , \quad u = -\frac{1}{a} \ln(-a\bar{u}) \quad (17)$$

y

$$v = T + \xi \quad , \quad u = T - \xi \quad (18)$$

de modo que la métrica queda

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-dT^2 + d\xi^2) \quad (19)$$

Esta es la métrica de Rindler.

Soluciones de Campo cuántico

Para el caso de un campo escalar sin masa, la ecuación que satisface en este caso es:

$$\text{Minkowski: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

$$\text{Rindler: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (22)$$

Se elige un conjunto completo de soluciones

$$\text{Minkowski: } f_\omega = \frac{e^{-i\omega(t+x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} = \frac{e^{-i\omega\bar{v}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad \text{y} \quad j_\omega = \frac{e^{-i\omega(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} = \frac{e^{-i\omega\bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (23)$$

$$\text{Rindler: } q_\Omega = \frac{e^{-i\Omega(T+\xi)}}{\sqrt{4\pi\Omega}} = \frac{e^{-i\Omega v}}{\sqrt{4\pi\Omega}} \quad \text{y} \quad p_\Omega = \frac{e^{-i\Omega(T-\xi)}}{\sqrt{4\pi\Omega}} = \frac{e^{-i\Omega u}}{\sqrt{4\pi\Omega}} \quad (24)$$

donde las funciones f_ω y q_ω corresponden a ondas inward, y j_ω junto con p_ω a ondas outward.

Campo cuántico y vacío

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Las soluciones entonces son:

$$\text{Minkowski: } \phi = \int_0^\infty d\omega \left(f_\omega a_\omega + j_\omega d_\omega + f_\omega^* a_\omega^\dagger + j_\omega^* d_\omega^\dagger \right) \quad (25)$$

$$\text{Rindler: } \phi = \int_0^\infty d\Omega \left(q_\Omega c_\Omega + p_\Omega b_\Omega + q_\Omega^* c_\Omega^\dagger + p_\Omega^* b_\Omega^\dagger \right) \quad (26)$$

Los vacíos en los dos espacios son tales que

$$\text{Minkowski: } a_\omega |0_M\rangle = d_\omega |0_M\rangle = 0 \quad (27)$$

$$\text{Rindler: } c_\omega |0_R\rangle = b_\omega |0_R\rangle = 0 \quad (28)$$

Debido al cambio de coordenadas, los operadores $(a_\omega, d_\omega) \neq (c_\Omega, b_\Omega)$ y por lo tanto $|0_M\rangle \neq |0_R\rangle$.

Transformación de Bogoliubov

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

No hay vacío correcto. Respondemos a la pregunta, cuál es la distribución de probabilidad para el número de partículas observadas en el marco acelerado del estado $|0_M\rangle$.

Comparamos las dos expansiones en el dominio de Rindler. Como el cambio de coordenadas es $\bar{u} \rightarrow u$ y $\bar{v} \rightarrow v$, entonces para ondas outward

$$\int_0^\infty d\omega \left(j_\omega d_\omega + j_\omega^* d_\omega^\dagger \right) = \int_0^\infty d\Omega \left(p_\Omega b_\Omega + p_\Omega^* b_\Omega^\dagger \right) \quad (29)$$

De aquí se pueden escribir los operadores $(b_\Omega, b_\Omega^\dagger)$ como combinación lineal de los $(d_\omega, d_\omega^\dagger)$. Para esto se calcula la transformada de Fourier de esta ecuación en u .

Transformación de Bogoliubov

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

$$\begin{aligned} \text{RHS:} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega u} \int_0^{\infty} d\Omega' \left(p_{\Omega'}(u) b_{\Omega'} + p_{\Omega'}^*(u) b_{\Omega'}^{\dagger} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\Omega'}} \left(e^{-i(\Omega' - \Omega)u} b_{\Omega'} + e^{i(\Omega' + \Omega)u} b_{\Omega'}^{\dagger} \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\Omega'}} \left(\delta(\Omega' - \Omega) b_{\Omega'} + \delta(\Omega' + \Omega) b_{\Omega'}^{\dagger} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{cases} b_{\Omega} & \text{si } \Omega > 0 \\ b_{|\Omega|}^{\dagger} & \text{si } \Omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

Transformación de Bogoliubov

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

$$\begin{aligned} \text{LHS:} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega u} \int_0^{\infty} d\omega \left(j_{\omega}(\bar{u}) d_{\omega} + j_{\omega}^*(\bar{u}) d_{\omega}^{\dagger} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \left(e^{i(\Omega u - \omega \bar{u})} d_{\omega} + e^{i(\omega \bar{u} + \Omega u)} d_{\omega}^{\dagger} \right) \\ &\equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \left(F(\omega, \Omega) d_{\omega} + F(-\omega, \Omega) d_{\omega}^{\dagger} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

donde

$$F(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{i(\Omega u - \omega \bar{u})} \quad \text{con} \quad \bar{u} = -\frac{1}{a} e^{-au} \quad (32)$$

Identificamos este resultado con

$$b_{\Omega} = \int_0^{\infty} d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega}^* d_{\omega} - \beta_{\Omega\omega}^* d_{\omega}^{\dagger} \right) \quad (33)$$

Número de Partículas

Los coeficientes de Bogoliubov son entonces

$$\alpha_{\Omega\omega}^* = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(\omega, \Omega) \quad \text{y} \quad \beta_{\Omega\omega}^* = -\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(-\omega, \Omega) \quad (34)$$

cuando $\omega, \Omega > 0$.

Calculamos el valor de expectación del número de partículas en el modo Ω :

$$\begin{aligned} \langle N_{\Omega} \rangle &= \langle 0_M | b_{\Omega}^{\dagger} b_{\Omega} | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int_0^{\infty} d\omega' \left(\alpha_{\Omega\omega'} d_{\omega'}^{\dagger} - \beta_{\Omega\omega'} d_{\omega'} \right) \int_0^{\infty} d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega}^* d_{\omega} - \beta_{\Omega\omega}^* d_{\omega}^{\dagger} \right) | 0_M \rangle \\ &= \int_0^{\infty} d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Para calcular esto usamos la siguiente propiedad de los coeficientes de Bogoliubov:

$$\delta(\Omega - \Omega') = \int_0^{\infty} d\omega \left(\alpha_{\Omega'\omega} \alpha_{\Omega\omega}^* - \beta_{\Omega'\omega} \beta_{\Omega\omega}^* \right) \quad (36)$$

Número de Partículas

Luego,

$$\delta(\Omega - \Omega') = \int_0^\infty d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} (F(\omega, \Omega)F^*(\omega, \Omega') - F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega'))$$

Usando que $F(\omega, \Omega) = F(-\omega, \Omega)e^{\pi\Omega/a}$

$$\begin{aligned}\delta(\Omega - \Omega') &= \int_0^\infty d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} \left(e^{\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}} - 1 \right) F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega') \\ &\Rightarrow \int_0^\infty d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega') = \left(e^{\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}} - 1 \right)^{-1} \delta(\Omega - \Omega')\end{aligned}$$

Y para $\Omega = \Omega'$

$$\int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 = \left(e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right)^{-1} \delta(0) \quad (37)$$

Número de Partículas

El número de partículas diverge porque es el total de partículas en todo el espacio.

Se puede ver que $\delta(0)$ corresponde al volumen del espacio, entonces se define una densidad de partículas:

$$\langle N_{\Omega} \rangle = n_{\Omega} \delta(0) \quad (38)$$

En este caso,

$$n_{\Omega} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1} \quad : \text{ Bose Einstein} \quad (39)$$

De aquí se identifica la temperatura:

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad : \text{ Temperatura de Unruh} \quad (40)$$

Conclusiones

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Un observador acelerado detecta partículas en el vacío de Minkowski. Es como si este observador estuviera en un baño termal con la temperatura de Unruh.

Interpretación física: Un detector acelerado perturba el estado cuántico del campo alrededor de su trayectoria. Las partículas detectadas son reales y la energía de estas partículas viene del agente que acelera el detector.

La existencia de los horizontes es la causante de la producción de partículas. En este caso, los horizontes se debían a la aceleración del observador.

El efecto Unruh en la práctica es difícil de usar. La aceleración más pequeña que se puede usar para hervir agua es $a = 2\pi k_B c T_e / \hbar = 9.2 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$.

Agujero Negro

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Se predice que los agujeros negros emiten partículas hacia afuera del horizonte.

En particular, veremos que un agujero negro de Schwarzschild emite partículas de un campo escalar sin masa.

La radiación emitida es la característica de un cuerpo negro.

Se puede generar una teoría termodinámica de agujeros negros. Se predice la evaporación de agujeros negros pequeños.

BH de Schwarzschild: Coordenada Tortuga

El espacio tiempo de un BH de masa M , sin carga y no rotante, en la métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (41)$$

Definimos la coordenada tortuga r^* como

$$dr = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^* \rightarrow r^*(r) = r - 2M + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (42)$$

de modo que la métrica queda

$$ds^2 = V(r)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \quad (43)$$

con $V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$.

Notar que r^* esta definida sólo para $r > 2M$, así que el dominio es el exterior del BH. Para $r \rightarrow \infty$, la métrica tiende a Minkowski.

BH de Schwarzschild: Coordenadas de Kruskal

Si se definen las coordenadas lightcone: $u = t - r^*$ y $v = t + r^*$, las coordenadas de Kruskal son

$$\bar{u} = -4Me^{-\frac{u}{4M}} \quad \text{y} \quad \bar{v} = 4Me^{\frac{v}{4M}} \quad (44)$$

y la métrica queda

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{1-\frac{r}{2M}} d\bar{u}d\bar{v} + r^2 d\Omega^2 \quad (45)$$

Y si por último definimos $\bar{u} = T - X$ y $\bar{v} = T + X$,

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{1-\frac{r}{2M}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (46)$$

Notamos que cuando $r \rightarrow 2M$, la métrica tiende a la de Minkowski.

Espacio-tiempo en coordenadas de Kruskal

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

La transformación de coordenadas es la misma que la del efecto Unruh. Kruskal equivale a un observador inercial mientras Schwarzschild a un observador con aceleración propia constante

En este caso $X^2 - T^2 = (4M)^2 e^{2r^*/4M}$. Un observador a una distancia r constante del BH tiene una aceleración propia constante $\frac{1}{4M} e^{-r^*/4M}$.

Hay completa analogía con el efecto Unruh, donde $a = 1/4M$. Será que $T = \frac{1}{8\pi M}$?

Soluciones de Campo cuántico

Buscamos una base de soluciones a la ecuación del campo escalar sin masa. En la coordenada tortuga, ϕ satisface

$$-\partial_t (r^2 \sin \theta \partial_t \phi) + \partial_{r^*} (r^2 \sin \theta \partial_{r^*} \phi) + \partial_\theta (V(r) \sin \theta \partial_\theta \phi) + \partial_\varphi \left(\frac{V(r)}{\sin \theta} \partial_\varphi \phi \right) = 0 \quad (47)$$

Por simetría en los ángulos se propone una solución del tipo: $\phi = \frac{\psi}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, y la ecuación queda

$$(\partial_t^2 - \partial_{r^*}^2 + W(r)) \psi = 0 \quad (48)$$

donde $W(r) = V(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]$.

Notamos que cuando $r \rightarrow \infty$, este potencial $W(r) \rightarrow 0$ así que las soluciones de ψ cuando $r \rightarrow \infty$ son ondas planas. Todo esto es análogo en las coordenadas de Kruskal para $r \rightarrow 2M$.

Soluciones de Campo cuántico

Como las coordenadas de Schwarzschild son regulares cuando $r \rightarrow \infty$, éstas son las apropiadas para expandir el campo en infinito:

$$\phi = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left(b_\omega e^{-i\omega u} + b_\omega^\dagger e^{i\omega u} + c_\omega e^{-i\omega v} + c_\omega^\dagger e^{i\omega v} \right) \quad (49)$$

Como las coordenadas de Kruskal son regulares en $r = 2M$, éstas son apropiadas para expandir el campo en el horizonte,

$$\phi = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left(d_\omega e^{-i\omega \bar{u}} + d_\omega^\dagger e^{i\omega \bar{u}} + a_\omega e^{-i\omega \bar{v}} + a_\omega^\dagger e^{i\omega \bar{v}} \right) \quad (50)$$

Se definen los vacíos $|0_T\rangle$ y $|0_K\rangle$ tales que

$$c_\omega |0_T\rangle = b_\omega |0_T\rangle = 0 \quad \text{y} \quad a_\omega |0_K\rangle = d_\omega |0_K\rangle = 0 \quad (51)$$

Número de Partículas

Respondemos a la pregunta de cuántas partículas outward del modo ω se miden en infinito con respecto al vacío $|0_K\rangle$. Para esto calculamos

$$\langle N_\omega \rangle = \langle 0_K | b_\omega^\dagger b_\omega | 0_K \rangle \quad (52)$$

Y por completa analogía al efecto Unruh,

$$N_\omega = \frac{1}{e^{\omega 8\pi M} - 1} \delta(0) \quad (53)$$

de modo que finalmente,

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\omega 8\pi M} - 1} \quad : \text{ Bose Einstein} \quad (54)$$

De aquí se identifica la temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \quad : \text{ Temperatura de Hawking} \quad (55)$$

Conclusiones

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Un observador en infinito detecta partículas saliendo del agujero negro. El agujero negro está en un baño termal con la temperatura de Hawking.

Este resultado es una característica del agujero negro y sólo depende de la masa. No depende de si el campo cuantizado era escalar o fermiónico, ni de si el agujero tenía momentun angular o carga.

Interpretación física: creación de un par partícula y antipartícula justo en el horizonte.

La temperatura de un agujero negro con la masa de sol, sería $T = 6.15 \times 10^{-8} \text{K}$. Radiación de fondo tiene $T = 2.725 \text{K}$.

Termodinámica de BH

Radiación
de
Hawking

Macarena
Lagos U.

Introducción

Teoría
Cuántica
de
Campos
en
Espacios
Curvos

Efecto
Unruh

Agujero
Negro

Se plantean las siguientes leyes de termodinámica para agujeros negros:

- **Ley 0:** La gravedad superficial κ sobre el evento horizonte es constante en un agujero negro estático.
- **Ley 1:** Corresponde a una conservación de la energía total junto con leyes de conservación de momentum total, momentum angular y carga. La primera ley es

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \phi dQ + \Omega dJ, \quad (56)$$

donde Ω es la velocidad angular del agujero negro y ϕ es el potencial electrostático.

- **Ley 2:** El área \mathcal{A} del evento horizonte es una función no decreciente en el tiempo.
- **Ley 3:** Es imposible que por cualquier procedimiento, sin importar cuán idealizados sean, reduzca κ a cero.

Se conecta termodinámica con agujeros negros: Entropía con área superficial, temperatura con gravedad superficial y energía con masa.

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad S = \frac{\mathcal{A}}{4} \quad M = E$$



Evaporación de agujeros negros

De acuerdo con la ley de Stefan-Boltzman, los cuerpos negros radían un flujo de energía dado por

$$L = \sigma T^4 A \quad (57)$$

donde σ es la constante de Boltzman, T la temperatura de equilibrio y A el área superficial del cuerpo.

Entonces la masa de un agujero negro decrecerá de modo que

$$\frac{dM}{dt} = -L \quad \Rightarrow \quad M(t) = M_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{1/3} \quad (58)$$

donde $\tau = 5120\pi M_0^3$ corresponde al tiempo de vida de un agujero negro con masa inicial M_0 .

De aquí se estima que la vida de un agujero negro de la masa del sol es $\tau \approx 6.7 \times 10^{66}$ años, y para un agujero con masa $M = 10^{15}$ gr es $\tau \approx 8.49 \times 10^{11}$ años.