Relatividad General
Tarea 2
30 de Agosto

Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Ernesto Frodden, efrodden@uc.cl
Fecha de entrega: Lunes 13 de Septiembre.

---

1. Considere el siguiente tensor y vector en una espacio vectorial de dos dimensiones
$$t^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_i = (3 \quad 1).$$
Ambos objetos están referidos a una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Considere una nueva base dada por
$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_1' + \vec{e}_2$$
y calcule $u^i = t^{ij} v_j$ en la nueva base.

2. Pruebe que el conjunto de todas las 1-formas es un espacio vectorial.

3. Demuestre que si $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, siempre existe una transformación de coordenadas que deja $\vec{E}$ paralelo a $\vec{B}$. Encuentre una relación entre los campos y la velocidad de este sistema.

4. Una fuente de fotones se encuentra en reposo en un sistema S y emite homogéneamente en todas las direcciones. Considere un observador S' que ve la fuente moverse con velocidad $-v$ a lo largo del eje x.

   a) S' observa un fotón emitido con ángulo α' con respecto al eje x'. Si la frecuencia en S es w, determine la frecuencia w' medida en S' (como función de v y α'). Verifique que en los casos límite $\alpha' = 0$ y $\alpha' = \pi$ se recuperan las fórmulas usuales del efecto Doppler.

   b) Demuestre que el ángulo α observado por S está relacionado con α' según
   $$\cos(\alpha') = \frac{\cos(\alpha) - v}{1 - v\cos(\alpha)}$$

   Ayuda: Note que basta con analizar un plano xy. Muestre que en S, $k^\mu = w\{1, \cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$ y escriba una expresión análoga para las componentes del mismo vector en S'.

5. Gimnasia tensorial: sea $g_{\alpha\beta}$ el tensor métrico, $g = det(g_{\alpha\beta})$, $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ los símbolos de Christoffel y A_α un vector cualquiera. Demuestre las siguientes identidades

   a) $g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$

   b) $g_{,\alpha} = -g g_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma,\alpha}$

   c) $\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta} = (\log |g|^{1/2})_{,\beta}$

   d) $A^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}A^{\alpha})_{,\alpha}$

   e) $A_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}A_{\alpha}{}^{\beta})_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}A^{\mu}{}_{\lambda}$

6. El siguiente elemento de línea corresponde a un espacio plano de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + 2dxdt + dy^2 + dz^2.$$

   Encuentre una transformación de coordenadas que lo lleve a la forma diagonal usual.