Relatividad y Gravitación, 2002/2
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 2

TIEMPO: 2 horas

1. Considere una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que en coordenadas $\{t, x^i\}$ es aproximadamente plana,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1,$$

y no depende del tiempo, $\partial_t h_{\mu\nu} = 0$ ($\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski). Para velocidades pequeñas, $dx^i/d\lambda << 1$, la ecuación de la geodésica puede ser aproximada por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{00}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Demuestre que esta ecuación implica la ecuación de Newton:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(x^i)}{\partial x^i}.$$

Determine el potencial gravitatorio $\phi(x)$ en términos de la métrica.

2. (i) Demuestre que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} := R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ es simétrico: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Sugerencia: use la identidad de Bianchi $R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + R^\mu{}_{\beta\gamma\alpha} + R^\mu{}_{\gamma\alpha\beta} = 0$. (También puede hacerlo directamente de la definición de R.)

   (ii) Dados dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$, se define la derivada de Lie $\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V} = (U^\mu V^\nu{}_{;\mu} - V^\mu U^\nu{}_{;\mu})\vec{e}_\nu$. Demuestre que las derivadas covariantes pueden ser reemplazadas por derivadas parciales sin alterar el resultado de la derivada de Lie.

3. Considere la siguiente métrica en dos dimensiones:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + dr^2.$$

donde $\alpha(r)$ es una función arbitraria de la coordenada r.
(i) Calcule $R^t{}_{rtr}$. ¿Existen otras componentes de R distintas de cero?
(ii) Demuestre que si $\alpha(r) = \log(r)$ entonces la curvatura es cero. (Nota: esta parte puede hacerse sin haber calculado (i)).

Recuerde:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\sigma})$$